Η εφαπτομένη σε σημείο της γραφικής παράστασης συνάρτησης

Του **Δημητρίου Α. Ντρίζου**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

Η εργασία αυτή αφιερώνεται
στη μνήμη του μαθηματικού Θωμά Κοντογιάννη

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Ένα από τα δύο κομβικά ερευνητικά προβλήματα που οι συστηματικές προσπάθειες για την επίλυσή τους αποτέλεσαν το έναυσμα για την ταχεία εξέλιξη (και κατ' άλλους την δημιουργία) του Απειροστικού Λογισμού (:Κλασσικής Ανάλυσης) ήταν το πρόβλημα του προσδιορισμού της εφαπτομένης ευθείας σε δεδομένο σημείο μιας καμπύλης[1]. Οι πρώτες πλέον γόνιμες ιδέες για την επίλυση του εν λόγω προβλήματος διατυπώθηκαν και δημοσιεύτηκαν, κυρίως, κατά το δεύτερο[2] μισό του 17^{ου} αιώνα από τους μεγαλοφυείς **Isaac Barrow**, **Isaac Newton** και **Gottfried Wilhelm Leibniz.** Βέβαια, έως και εκείνη τη χρονική περίοδο[3], το πρόβλημα της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης ήταν διαφορετικό από αυτό που έχουμε κατά νου σήμερα. Εστιάζονταν, κυρίως, *στη γεωμετρική κατασκευή* της εφαπτομένης ευθείας, επηρεασμένοι ακόμη, από τις κατευθυντήριες ιδέες του **Αρχιμήδη** που χαρακτηρίζονταν από τη *στατική* αντίληψη για την έννοια της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης με ομαλή συμπεριφορά (όπως ο κύκλος και οι κωνικές τομές). Έως τις αρχές του17^{ου} αιώνα, *ορίζουν ως εφαπτομένη την ευθεία που εγγίζει την καμπύλη σ' ένα σημείο, χωρίς να διαπερνά την καμπύλη*. Εξαίρεση αποτελεί το παράδειγμα της εφαπτομένης της έλικας: Ο Αρχιμήδης αντιμετώπισε την εφαπτομένη της έλικας (στην εργασία του *Περί Ελίκων*) με μεθοδολογία που μπορεί να χαρακτηριστεί, κατά κάποιον τρόπο, ως πρόδρομη του Διαφορικού Λογισμού.

Οι πρώτες ιδέες για την εφαπτομένη ευθεία, στο πλαίσιο της *κινηματικής της* θεώρησης –που βρίσκονται κοντύτερα προς το σημερινό πνεύμα– διατυπώνονται πιο συ-

---

[1] Το δεύτερο πρόβλημα ήταν ο προσδιορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας και επιτάχυνσης κινητού σημείου (Με το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκε κυρίως ο Isaac Newton).

[2] Στο πρώτο μισό του 17^{ου} αιώνα, λύση στο πρόβλημα της γεωμετρικής κατασκευής της εφαπτομένης ευθείας σε σημείο μιας ομαλής καμπύλης δόθηκε και από τους **Torricelli** και **Pierre de Fermat**. Ο πρώτος, το 1644, θεώρησε την καμπύλη ως την τροχιά ενός κινουμένου σημείου, η κίνηση του οποίου ήταν αποτέλεσμα δύο απλούστερων κινήσεων με γνωστές τις κατευθύνσεις και τα μέτρα των ταχυτήτων τους. Με εφαρμογή του νόμου του παραλληλογράμμου εύρισκε την κατεύθυνση της συνισταμένης κίνησης η οποία ήταν και η κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο που ήθελε. Ο δεύτερος, που μας είναι σήμερα γνωστός από το ομώνυμο θεώρημά του περί των ακροτάτων, έλυσε το πρόβλημα της χάραξης της εφαπτομένης με τη συμβολή των *απειροστών* και της μεθόδου του με την οποία έβρισκε τα μέγιστα και ελάχιστα (Στο μέσον περίπου του 17^{ου} αιώνα οι μαθηματικοί είχαν κατανοήσει ότι στις ομαλές καμπύλες, τα σημεία των ακροτάτων βρίσκονταν με τον μηδενισμό της κλίσης της εφαπτομένης στα σημεία αυτά).

[3] Είναι απαραίτητο να επισημάνουμε εδώ ότι, τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος ορίζονται ασαφώς και γίνονται αντιληπτές μόνον διαισθητικά. Δεν είχε διαμορφωθεί ακόμη η έννοια της συνάρτησης˙ και βεβαίως, δεν γίνεται λόγος για ορισμούς του ορίου και της συνέχειας, χωρίς την εμπλοκή της εποπτείας που εδράζεται στη γεωμετρία και τη φυσική. Τότε (17^{ος} αιώνας), από τους **Descartes** και **Fermat**, επιτεύχθηκε για πρώτη φορά και η αλγεβροποίηση της Γεωμετρίας (:αφετηρία για την βαθμιαία ανάπτυξη της Αναλυτικής Γωμετρίας), η οποία επέτρεπε πλέον, κατά έναν τρόπο γενικό, και τη συστηματική μελέτη καμπυλών πέραν των κωνικών τομών.

στηματικά στο έργο του Leibniz.:*Ορίζει ως εφαπτομένη καμπύλης την ευθεία γραμμή που ενώνει δύο απείρως γειτονικά σημεία της καμπύλης*˙ και για την κατασκευή της στηρίχτηκε στο φημισμένο *χαρακτηριστικό ή διαφορικό τρίγωνο* (που είχε ήδη χρησιμοποιήσει και ο Barrow) και στις απείρως μικρές μεταβολές dx και dy των x και y. Ο Leibniz, με τον εν λόγω ορισμό του, κάνει μια υπέρβαση –ένα ποιοτικό άλμα–, ορίζοντας την εφαπτομένη μέσω μιας γεωμετρικής *οριακής διαδικασίας*.. Μολονότι και ο ορισμός του Leibniz για την εφαπτομένη ευθεία ήταν ανεπαρκής, έθεσε όμως τις βάσεις για την ουσιαστική κίνηση της έρευνας προς τα μπρος. Οι έννοιες που ήδη επινοήθηκαν θα έπρεπε να θεμελιωθούν κατά ένα τρόπο απαλλαγμένο από την εποπτεία της γεωμετρίας και της φυσικής, η οποία πολλές φορές ενέχει τον κίνδυνο της δημιουργίας αντιφάσεων. Μια τέτοια θεμελίωση επιχειρείται σταδιακά στους επόμενους δυο αιώνες που ακολουθούν. Πρώτα από τον **Augustin Louis Cauchy**, ο οποίος περί το 1820, δίνει τον ορισμό του ορίου, με τη βοήθεια του οποίου ορίζει τις έννοιες της σύγκλισης, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος. [Στον Cauchy οφείλεται ο ορισμός της συνάρτησης ως μιας σχέσης μεταξύ μεταβλητών ποσοτήτων. Επίσης, θεωρείται ο πρώτος που εισήγαγε τους *εψιλοντικούς* ορισμούς, τους οποίους χρησιμοποιούσε όταν η μέθοδος των απειροστών αποτύγχανε]. Όμως και ο Cauchy στήριξε την έννοια του ορίου στο διαισθητικό "συνεχές" της ευθείας γραμμής –ως γεωμετρικής εικόνας του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Η *μη γεωμετρική κατασκευή* του συνόλου $\mathbb{R}$, δηλαδή η θεμελίωσή του ως συνόλου αριθμών απαλλαγμένου από την εποπτεία, πραγματοποιήθηκε τη δεκαετία του 1870 από τους **Meray**, **Weierstrass**, **Heine**, **Cantor** και **Dedekind**. Το πρόβλημα που δημιουργήθηκε με ορισμούς που στηρίχτηκαν στην εποπτεία αναδείχτηκε όταν, το 1874, ο Weierstrass παρουσίασε ένα παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης που δεν ήταν παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της, δηλαδή που δεν είχε εφαπτομένη σε κανένα σημείο του γραφήματός της –κάτι που ήταν αντίθετο με τη διαίσθηση. Στη συνέχεια ο Weierstrass διόρθωσε τις έως τότε αδυναμίες του Απειροστικού Λογισμού, αντικαθιστώντας στους ορισμούς των ορίων τις διαισθητικές έννοιες του *απείρως μικρού και του απείρως μεγάλου* με ανισοτικές σχέσεις απόλυτων τιμών που περιείχαν τους αριθμούς **ε** και **δ**, στη μορφή με την οποία οι εν λόγω ορισμοί διατυπώνονται και σήμερα. Έτσι, οι ορισμοί και οι προτάσεις που διατυπώνονται με τη μέθοδο αυτή ανάγονται πλέον σε προτάσεις και σχέσεις πεπερασμένων και όχι απείρων μεγεθών. Τελειοποιείται τότε η θεμελίωση της Ανάλυσης, στο επίπεδο τουλάχιστον που μας αφορά και, από το χρονικό αυτό σημείο και ύστερα, η Ανάλυση διαθέτει κατάλληλη ορολογία, λειτουργικό συμβολισμό, αναλυτικούς κανόνες και, το κυριότερο, μια ενιαία και γενική τεχνική για την αντιμετώπιση των διαφόρων προβλημάτων.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Ενδεικτικά θέματα
σχετικά με την έννοια της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης

ΘΕΜΑ 1^0

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \alpha \cdot \dfrac{\ln(x+e)}{x+e}$, όπου $\alpha \neq 0$.

Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες σημείου Μ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη (ε) παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = x + 17$.

β) Την τιμή του α έτσι, ώστε η (ε) να εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln(x+e)$ καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της g.

ΘΕΜΑ 2^0

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = -(x+\alpha)^2$, όπου $\alpha \in R$.

Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_1 = 1$ εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της g, να βρείτε την τιμή του α και τα σημεία επαφής της (ε) με τις γραφικές παραστάσεις των f και g.

ΘΕΜΑ 3^0

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha}{x^2}$ και $g(x) = \dfrac{\beta}{x}$, όπου a και β πραγματικοί αριθμοί.

α) Να βρείτε τις τιμές των a και β έτσι, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 4$.

β) Με $\alpha = 16$ και $\beta = 8$, να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του κοινού σημείου Μ των γραφικών παραστάσεων των f και g

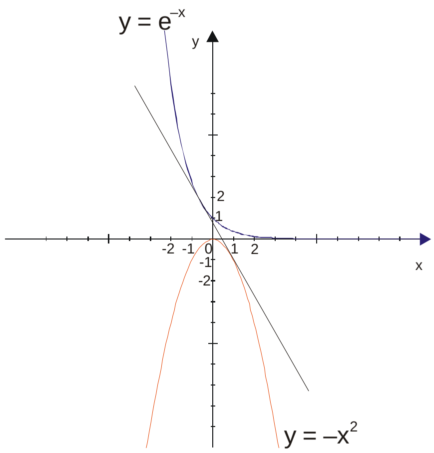
ii. Την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης στο Μ.

ΘΕΜΑ 4^0

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{-x} \text{ και } g(x) = -x^2.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_1 \in (-2,0)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $\mathrm{A}(x_1, f(x_1))$ της γραφικής παράστασης της f να ταυτίζεται με την εφαπτομένη σε σημείο $\mathrm{B}(x_2, g(x_2))$ της γραφικής παράστασης της g.



ΘΕΜΑ 5^0

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $16 \cdot x \le f(x) \le x^2 + 64$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 8$ της γραφικής παράστασης της f ορίζεται εφαπτομένη η οποία διέρχεται από την αρχή $\mathrm{O}(0,0)$ των αξόνων.

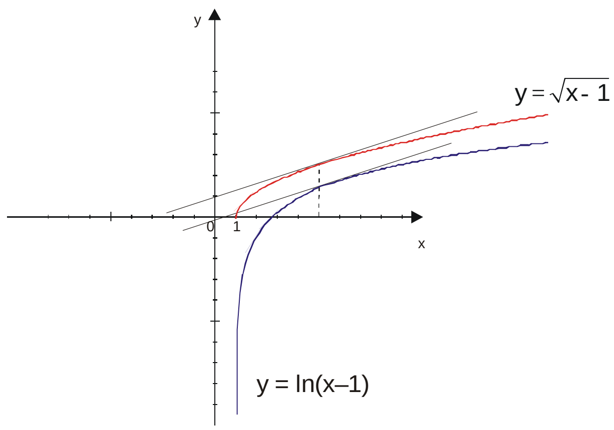
ΘΕΜΑ 6^0

Έστω $f,g:R\to R$ δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
Αν οι ευθείες $y=40x-55$ και $y=-4x+3$ είναι αντιστοίχως οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f\circ g$ και g στα σημεία τους με τετμημένη $x_0=2$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_1=-5$.

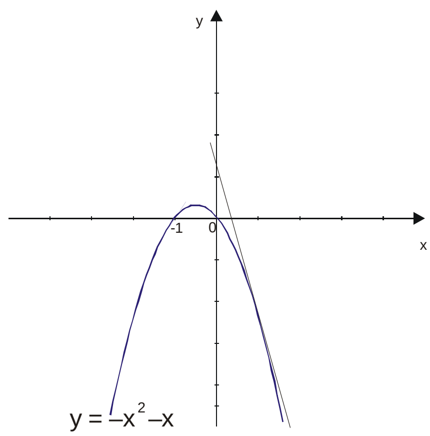
ΘΕΜΑ 7^0
Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$, συνεχής στο σημείο $x_0=5$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-4x}{x-5}=1$.
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=5$.

ΘΕΜΑ 8^0
Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$, συνεχής στο σημείο x_0 για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-\kappa\cdot x-\lambda}{x-x_0}=0$, όπου κ,λ συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί.
Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=\kappa\cdot x+\lambda$ εφάπτεται στο σημείο $\mathrm{M}(x_0,f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f.

ΘΕΜΑ 9^0
Δίνονται οι συναρτήσεις:
$f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\ln(x-1)$
με $x>1$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x για το οποίο οι εφαπτόμενες στα σημεία $\mathrm{A}(x,f(x))$ και $\mathrm{B}(x,g(x))$ των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι παράλληλες.



ΘΕΜΑ 10^0
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2-x$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη σε σημείο $\mathrm{M}(x_0,f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη $\alpha\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$.



ΘΕΜΑ 11^0

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(4-x^2)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία η γραφική της παράσταση, C_f, τέμνει τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$ τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ 12^0

Αν για μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f ισχύει $f^3(x)+f(x)-10\cdot x=0$ για κάθε $x\in R$, τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

ΘΕΜΑ 13^0

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f και g τέτοιες, ώστε:

$f(x)-g(x)=2009\cdot x-2009$ για κάθε $x\in R$

Αν (ε_1) και (ε_2) είναι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα σημεία τους $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ και $\mathrm{B}(x_0, g(x_0))$, να βρείτε την τετμημένη του κοινού σημείου των (ε_1) και (ε_2).

Βιβλιογραφικές πηγές:

[1] Γιαννακούλιας, Ε. (2007). "*Απειροστικός Λογισμός – Η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^o π. Χ. έως και τον 19^o αιώνα*", Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

[2] Ντρίζος, Δ. "*Τα δύο θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού*", άρθρο στο περιοδικό "Ευκλείδης Γ΄", τχ 67^o (Ιούλιος-Δεκέμβριος 2007), σσ. 3-20., Αθήνα: Έκδοση της Ε.Μ.Ε.

[3] Περιοδικό "Ευκλείδης Β΄" της Ε.Μ.Ε

[4] Υπό προετοιμασία προσωπική εργασία: "*Η εφαπτομένη σε σημείο της γραφικής παράστασης συνάρτησης, στο πλαίσιο της Ανάλυσης – Μία διδακτική πρόταση*".